3M

УДК 621.391/26

И.И. Маркович
Научно-конструкторское бюро цифровой обработки сигналов
Южного федерального университета, г. Таганрог, Россия
Россия, 347922, г. Таганрог, ул. Шевченко, 2

Алгоритмы вычисления спектров сигналов в системах обработки изображений

I.I. Markovich
SFedU Research and Design Bureau of Digital Signal Processing
of Southern Federal University.
Russian Federation, 347922, Taganrog, Shevchenko st., 2

Signal Spectrum Computational Procedure Algorithms in the Image-Processing Systems

І.І. Маркович
Науково-конструкторське бюро цифрової обробки сигналів
Південного федерального університету, м. Таганрог, Росія
Росія, 347922, м. Таганрог, вул. Шевченка, 2

Алгоритми обчислення спектрів сигналів в системах обробки зображень

В статье рассматриваются алгоритмы вычисления спектров действительных сигналов, предназначенные для использования в системах цифровой обработки двумерных сигналов. Получен в удобном для практического использования виде алгоритм вычисления спектра действительной последовательности с помощью применения процедуры быстрого преобразования Фурье размером, равным половине длины реализации сигнала. Приведены структурные схемы двух алгоритмов.
Ключевые слова: цифровая обработка сигналов и изображений, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье (БПФ), совмещенные алгоритмы вычисления БПФ.

In the paper, the problem of real signals spectrums computational procedure algorithms used in the systems of two-dimensional digital signal processing are considered. The practical application of the derived algorithms is real sequence spectrum computation with fast Fourier transform procedure, equal to half of signal realization length. The block diagrams of two algorithms are given.
Key Words: digital signal and image processing, discrete Fourier transform, fast Fourier transform (FFT), matched algorithms of FFT computation.

У статті розглядаються алгоритми обчислення спектрів дійсних сигналів, призначені для використання в системах цифрової обробки двовимірних сигналів. Одержаний в зручному для практичного використання вигляді алгоритм обчислення спектру дійсної послідовності за допомогою застосування процедури швидкого перетворення Фур'є розміром, рівним половині довжини реалізації сигналу. Наведено структурні схеми двох алгоритмів.
Ключові слова: цифрова обробка сигналів та зображень, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є (ШПФ), суміщені алгоритми обчислення ШПФ.

Введение

Изображения, получаемые при картографировании поверхности Земли и дна Мирового океана радиолокационными и гидроакустическими методами, сейсмограммы, снимки, получаемые с помощью электронных микроскопов, представляют собой записи двумерных действительных сигналов.

Для обработки таких сигналов используют двумерные системы цифровой обработки изображений. Учитывая свойство разделимости двумерного преобразования Фурье, для определения спектров изображений применяют одномерные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые дают максимальную эффективность при вычислении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) комплексных дискретных последовательностей [1-6]. При использовании стандартных алгоритмов для вычисления спектров действительных сигналов их эффективность существенно снижается.

Свойства симметрии спектров *X(k)* действительных последовательностей *x(nT)*

$$\operatorname{Re} X(k) = \operatorname{Re} X(N-k), \qquad \operatorname{Im} X(k) = -\operatorname{Im} X(N-k),$$
$$\left|X(k)\right| = \left|X(N-k)\right|, \qquad \arg X(k) = -\arg X(N-k),$$

позволяют с помощью выполнения одной процедуры БПФ размером *N* обработать одновременно две действительные последовательности по *N* отсчетов каждая или, используя процедуру БПФ размером *N/2*, вычислить ДПФ действительной последовательности в *N* отсчетов, выполняя дополнительно несложные операции предобработки и послеобработки. Такие совмещенные алгоритмы существенно уменьшают требуемое количество операций при цифровой обработке изображений.

Целью данной работы является получение в виде, представляющем практическую ценность, алгоритма вычисления ДПФ одной вещественной последовательности *x(nT)* длиной *N* с помощью применения процедуры БПФ размером *N/2*, а также разработка структурных схем двух алгоритмов, ориентированных на обработку действительных сигналов.

Описание совмещенных алгоритмов

Рассмотрим совмещенный алгоритм вычисления ДПФ двух вещественных последовательностей *x(nT)* и *y(nT)* длиной по *N* отсчетов с помощью однократного использования процедуры БПФ размером *N*, заключающийся в следующем [7].

Из двух действительных последовательностей *x(nT)* и *y(nT)* формируется одна комплексная *z(nT)* следующим образом:

$$z(nT) = x(nT) + jy(nT), \text{ где } n=0,1\ldots,N-1.$$

Тогда ДПФ новой последовательности будет равно:

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x(nT) + jy(nT)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \text{ где } \quad k = 0\ldots N\text{-}1.$$

Комплексно-сопряженное значение ДПФ для последовательности *z(nT)* в точке (*N-k)* будет равно:

$$Z^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x(nT) - jy(nT)\right]e^{j\frac{2\pi}{N}n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x(nT) - jy(nT)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Учитывая, что *x(nT)* и *y(nT)* действительные последовательности, можно записать:

$$Z(k)+Z^*(N-k)=2\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=2X(k);$$

$$Z(k)-Z^*(N-k)=2j\sum_{n=0}^{N-1}y(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=2jY(k).$$

Откуда получаются аналитические выражения для ДПФ искомых действительных последовательностей:

$$X(k)=\frac{Z(k)+Z^*(N-k)}{2}; \qquad Y(k)=\frac{Z(k)-Z^*(N-k)}{2j}.$$

На основе приведенных соотношений получена структурная схема совмещенного алгоритма вычисления ДПФ двух действительных последовательностей, изображенная на рис. 1.

Операция предобработки представляет собой простое формирование без дополнительных вычислений комплексной последовательности *z(nT)* из двух действительных *x(nT)* и *y(nT)*, а операция послеобработки – это вычисление с помощью приведенных выше формул искомых спектров *X(k)* и *Y(k)* по полученным значениям *Z(k)*, требующее дополнительно выполнения одного комплексного сложения на один спектральный отсчет каждой последовательности. Остальные операции послеобработки – тривиальные.

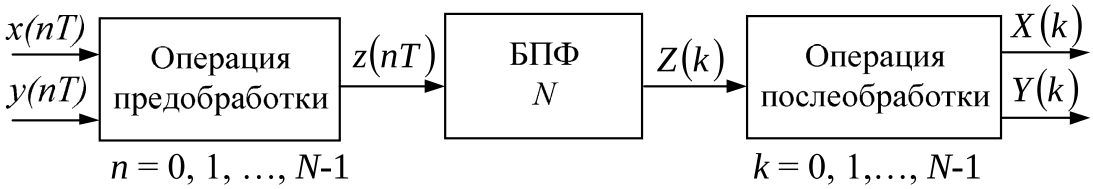


Рисунок 1 – Структурная схема алгоритма вычисления ДПФ двух вещественных последовательностей

Эффективность применения алгоритма заключается в уменьшении количества умножений по сравнению со стандартным БПФ в два раза.

Для получения в удобном для практического использования виде совмещенного алгоритма вычисления ДПФ одной вещественной последовательности *x(nT)* длиной *N* с помощью применения процедуры БПФ размером *N/2* представим любую кратную двум последовательность *x(nT)* в виде двух последовательностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ длиной *N/2* отсчетов каждая, сформированных из четных и нечетных отсчетов:

$$x_1(nT)=x(2nT), \quad где\ n=0,1,...,\ \frac{N}{2}-1;$$

$$x_2(nT)=x[(2n+1)T], \quad где\ n=0,1,...,\ \frac{N}{2}-1.$$

Тогда *N*-точечное ДПФ исходной последовательности *x(nT)* можно записать в виде:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[(2n+1)T]e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k}.$$

Или, используя обозначения для четных $x_1(nT)$ и нечетных $x_2(nT)$ последовательностей:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} + \left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

$$X(k) = X_1(k) + X_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k},$$

где $X_1(k)$, $X_2(k)$ – $N/2$-точечные ДПФ последовательностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$.

Последнее соотношение показывает связь ДПФ любой N-точечной последовательности с ДПФ двух $N/2$-точечных последовательностей, составленных из четных и нечетных отсчетов исходной последовательности.

Теперь положим, что исходная последовательность $x(nT)$ является действительной. Тогда последовательности $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ также действительные.

Сформируем новую комплексную последовательность длиной $N/2$ отсчетов из двух действительных по следующему правилу:

$$z_1(nT) = x_1(nT) + j\,x_2(nT), \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots \frac{N}{2}\text{-}1.$$

ДПФ последовательности $z_1(nT)$ будет равно:

$$Z_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x_1(nT) + jx_2(nT) \right] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk}, \text{ где } k = 0 \ldots \frac{N}{2}\text{-}1.$$

Тогда в соответствии с рассмотренным выше первым совмещенным алгоритмом вычисления ДПФ двух действительных последовательностей с помощью однократного использования процедуры БПФ имеем:

$$X_1(k) = \frac{Z_1(k) + Z_1^*(N-k)}{2}; \qquad X_2(k) = \frac{Z_1(k) - Z_1^*(N-k)}{2j}.$$

Откуда получим алгоритм вычисления ДПФ N-точечной исходной действительной последовательности $x(nT)$ с помощью БПФ размером $N/2$ в удобной для практического использования форме:

$$X(k) = X_1(k) + X_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = \frac{Z_1(k) + Z_1^*(N-k)}{2} + \frac{Z_1(k) - Z_1^*(N-k)}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}k},$$

где $k = 0, 1, 2 \ldots N/2\text{-}1$.

Значения $X(k)$ при $k = N/2 \ldots N - 1$ находят, используя свойства симметрии спектров действительных последовательностей.

Структурная схема алгоритма изображена на рис. 2.

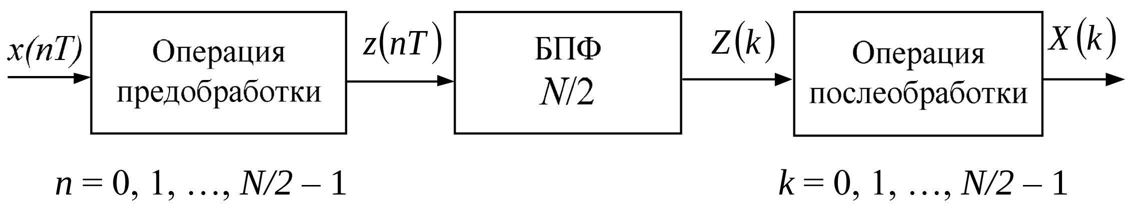


Рисунок 2 – Структурная схема алгоритма вычисления ДПФ одной вещественной последовательности с помощью БПФ размером $N/2$

В этом случае операция предобработки – это простое формирование *N/2*-точечной комплексной последовательности из четных и нечетных отсчетов исходной действительной последовательности, не требующее дополнительных вычислений.

Операция послеобработки выполняется по последней полученной формуле и требует дополнительно выполнения одного нетривиального комплексного умножения и трех комплексных сложений на каждый спектральный отсчет.

Эффективность алгоритма по количеству умножений можно оценить следующим образом:

$$Э_{к.у.} = \frac{\frac{N}{2}\log_2 N}{\frac{N}{4}\log_2 \frac{N}{2} + N} = \frac{2\log_2 N}{\log_2 \frac{N}{2} + 4}.$$

При $N = 1024$ эффективность равна 1,5.

Выводы

Полученный в удобном для практического использования виде совмещенный алгоритм вычисления ДПФ действительной последовательности *x(nT)* длиной *N* с помощью применения процедуры БПФ размером *N/2* и приведенные структурные схемы двух совмещенных алгоритмов ориентированы на вычисление двумерного спектра сигналов в системах обработки изображений.

Литература

1. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
2. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Ярославский Л.П. – М. : Радио и связь, 1979. – 312 с.
3. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Яне Б. – М. : Техносфера, 2007. – 584 с.
4. Маркович И.И. Перспективные методы, алгоритмы и системы цифрового формирования и пространственно-временной обработки сигналов и изображений различной физической природы. Информационно-телекоммуникационные и компьютерные технологии, устройства и системы: состояние и перспективы развития в Южном федеральном университете : монография / И.И. Маркович ; под ред. И.А. Каляева, А.П. Кухаренко. – Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2010. – С. 459-490.
5. Маркович И.И. Многофункциональный гидроакустический комплекс авиационного базирования. Морская, авиационная и ракетно-космическая техника, радиотехника, автоматика и управление: состояние и перспективы развития в Южном федеральном университете : монография / И.И. Маркович. – Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2011. – С. 7-38.
6. Маркович И.И. Цифровая пространственно-временная обработка сигналов в гидроакустических системах и комплексах. Подводные технологии и средства освоения Мирового океана / Маркович И.И. – М. : Издательский дом «Оружие и технологии», 2011. – С. 366-373.
7. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М. : Мир, 1989. – 540 с.

Literatura

1. Rabiner L. Teorija i primenenie cifrovoj obrabotki signalov. M.: Mir, 1978. 848 s.
2. Jaroslavskij L.P. Vvedenie v cifrovuju obrabotku izobrazhenij. M.: Radio i svjaz’, 1979. 312 s.
3. Jane B. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij. M.: Tehnosfera, 2007. 584 s.
4. Markovich I.I. Perspektivnye metody, algoritmy i sistemy cifrovogo formirovanija i prostranstvenno-vremennoj obrabotki signalov i izobrazhenij razlichnoj fizicheskoj prirody. Informacionno-telekommunikacionnye i komp'juternye tehnologii, ustrojstva i sistemy: sostojanie i perspektivy razvitija v Juzhnom federal’nom universitete. Rostov n/D: Izd-vo JuFU: 2010. S.459-490.

5. Markovich I.I. Mnogofunkcional’nyj gidroakusticheskij kompleks aviacionnogo bazirovanija. Morskaja, aviacionnaja i raketno-kosmicheskaja tehnika, radiotehnika, avtomatika i upravlenie: sostojanie i perspektivy razvitija v Juzhnom federal’nom universitete. Rostov n/D: Izd-vo JuFU: 2011. S.7-38.
6. Markovich I.I. Cifrovaja prostranstvenno-vremennaja obrabotka signalov v gidroakusticheskih sistemah i kompleksah. Podvodnye tehnologii i sredstva osvoenija Mirovogo okeana. M.: Izdatel’skij dom “Oruzhie i tehnologii”. 2011. S. 366-373.
7. Bendat Dzh. Prikladnoj analiz sluchajnyh dannyh. M.: Mir. 1989. 540 s.

RESUME

I.I. Markovich

Signal Spectrum Computational Procedure Algorithms in the Image-Processing Systems

Images obtained in course of Earth area and sea bed mapping by the radiolocation and hydroacoustic methods, records of ground motion and other images obtained by electron microscope in fact are the records of two-dimensional real signals.

Processing of such signals is realized by two-dimensional systems of digital signal and image processing. Taking into account the divisibility of two-dimensional Fourier transform, one-dimensional algorithms of fast Fourier transform (FFT) are used for image spectrums analysis, with are the most effective in discrete Fourier transform (DFT) computation of complex digital sequences. This efficiency is essentially reduced when standard algorithms are used for real signal spectrum computational procedure.

Symmetry of real digital sequences spectrums allows simultaneous processing of two equal digital sequences by means of one FFT procedure, or, using FFT of the half-length to calculate discrete Fourier transform of the real initial sequence by additional simple pre- and post-processing operations. Such matched algorithms considerably reduced the number of operations in digital image processing.

The study was aimed to obtain algorithms of real sequence DFT computation for practical use.

As the result, the effective algorithm of DFT computation of real *N*- length sequence by means of *N/2*-length FFT procedure was developed, and the block diagrams of two matched algorithms, intended for two-dimensional signals spectrums computation in systems of digital image processing was obtained.

Статья поступила в редакцию 05.06.2012.